

Code No. 7018

For Scheme-I Candidates only

Second Year – March 2015

Time : 2½ Hours
Cool-off time : 15 Minutes

Part – III

MATHEMATICS (SCIENCE)

Maximum : 80 Scores

General Instructions to Candidates :

- There is a 'cool-off time' of 15 minutes in addition to the writing time of 2½ hrs.
- You are not allowed to write your answers nor to discuss anything with others during the 'cool-off time'.
- Use the 'cool-off time' to get familiar with questions and to plan your answers.
- Read questions carefully before answering.
- All questions are compulsory and only internal choice is allowed.
- When you select a question, all the sub-questions must be answered from the same question itself.
- Calculations, figures and graphs should be shown in the answer sheet itself.
- Malayalam version of the questions is also provided.
- Give equations wherever necessary.
- Electronic devices except non-programmable calculators are not allowed in the Examination Hall.

നിർദ്ദേശങ്ങൾ :

- നിർദ്ദിഷ്ട സമയത്തിന് പുറമെ 15 മിനിറ്റ് 'കൂൾ ഓഫ് ടൈം' ഉണ്ടായിരിക്കും. ഈ സമയത്ത് ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം എഴുതാനോ, മറ്റുള്ളവരുമായി ആശയവിനിമയം നടത്താനോ പാടില്ല.
- ഉത്തരങ്ങൾ എഴുതുന്നതിന് മുമ്പ് ചോദ്യങ്ങൾ ശ്രദ്ധാപൂർവ്വം വായിക്കണം.
- എല്ലാ ചോദ്യങ്ങൾക്കും ഉത്തരം എഴുതണം.
- ഒരു ചോദ്യനമ്പർ ഉത്തരമെഴുതാൻ തെരഞ്ഞെടുത്തു കഴിഞ്ഞാൽ ഉപചോദ്യങ്ങളും അതേ ചോദ്യനമ്പറിൽ നിന്ന് തന്നെ തെരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടതാണ്.
- കണക്ക് കുട്ടലുകൾ, ചിത്രങ്ങൾ, ഗ്രാഫുകൾ എന്നിവ ഉത്തരപേപ്പറിൽ തന്നെ ഉണ്ടായിരിക്കണം.
- ചോദ്യങ്ങൾ മലയാളത്തിലും നൽകിയിട്ടുണ്ട്.
- ആവശ്യമുള്ള സ്ഥലത്ത് സമവാക്യങ്ങൾ കൊടുക്കണം.
- പ്രോഗ്രാമുകൾ ചെയ്യാനാകാത്ത കാൽക്കുലേറ്ററുകൾ ഒഴികെയുള്ള ഒരു ഇലക്ട്രോണിക് ഉപകരണവും പരീക്ഷാഹാളിൽ ഉപയോഗിക്കുവാൻ പാടില്ല.

1. (a) Choose the correct statement related to the matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (Score : 1)

- (i) $A^3 = A, B^3 \neq B$
 (ii) $A^3 \neq A, B^3 = B$
 (iii) $A^3 = A, B^3 = B$
 (iv) $A^3 \neq A, B^3 \neq B$

- (b) If $M = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, then verify the equation $M^2 - 10M + 11I_2 = 0$. (Scores : 2)

- (c) Inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (Scores : 3)

2. Prove that $\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} = (x + y + z)(x - y)(y - z)(z - x)$ (Scores : 3)

OR

- Prove that $\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 2! & 3! & 4! \\ 3! & 4! & 5! \end{vmatrix} = 4!$ (Scores : 3)

3. Solve the system of Linear equations

$$x + 2y + z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$x - y + z = 2$$

(Scores : 3)

4. (a) What is the minimum number of ordered pairs to form a non-zero reflexive relation on a set of n elements? (Score : 1)

- (b) On the set \mathbb{R} of real numbers, S is a relation defined as

$$S = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x + y = xy\}$$

Find $a \in \mathbb{R}$ such that 'a' is never the first element of an ordered pair in S . Also find $b \in \mathbb{R}$ such that 'b' is never the second element of an ordered pair in S . (Scores : 2)

- (c) Consider the function $f(x) = \frac{3x+4}{x-2}, x \neq 2$. Find a function $g(x)$ on a suitable domain such that $(g \circ f)(x) = x = (f \circ g)(x)$. (Scores : 2)

5. (a) What is the value of $\sin^{-1}(\sin 160^\circ)$?
 (i) 160°
 (ii) 70°
 (iii) -20°
 (iv) 20° (Score : 1)
- (b) Prove that $2 \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{7} = \tan^{-1} \frac{31}{17}$ (Scores : 3)
6. (a) Find a and b if the function
- $$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & -2 \leq x < 0 \\ a \cdot 2^x & 0 \leq x \leq 1 \\ b + x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$
- is a continuous function on $[-2, 2]$ (Scores : 3)
- (b) How many of the functions $f(x) = |x|$, $g(x) = |x|^2$ and $h(x) = |x|^3$ are not differentiable at $x = 0$?
 (i) 0
 (ii) 1
 (iii) 2
 (iv) 3 (Score : 1)
7. Find $\frac{dy}{dx}$ if
- (a) $x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4y^3 = 5$ (Scores : 2)
- (b) $x = 2 \cos^3 \theta$, $y = 2 \sin^3 \theta$ (Scores : 2)
- (c) $y = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$; $-1 \leq x \leq 1$ (Scores : 2)
8. (a) Which of the following functions is always increasing ?
 (i) $x + \sin 2x$
 (ii) $x - \sin 2x$
 (iii) $2x + \sin 3x$
 (iv) $2x - \sin x$ (Score : 1)
- (b) The radius of a cylinder increases at a rate of 1 cm/s and its height decreases at a rate of 1 cm/s. Find the rate of change of its volume when the radius is 5 cm and the height is 15 cm. (Scores : 2)
 If the volume should not change even when the radius and height are changed, what is the relation between the radius and height? (Score : 1)
- (c) Write the equation of tangent at (1, 1) on the curve $2x^2 + 3y^2 = 5$ (Scores : 2)

5. (a) $\sin^{-1}(\sin 160^\circ)$ വിലയെത്ര ?
 (i) 160° (ii) 70°
 (iii) -20° (iv) 20° (സ്കോർ : 1)

(b) $2 \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{7} = \tan^{-1} \frac{31}{17}$ എന്നു തെളിയിക്കുക. (സ്കോർസ് : 3)

6. (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & -2 \leq x < 0 \\ a \cdot 2^x & 0 \leq x \leq 1 \\ b + x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

എന്ന ഫംഗ്ഷൻ $[-2, 2]$ -ൽ കൺടിനസ് ആയാൽ a, b എന്നിവയുടെ വില കാണുക. (സ്കോർസ് : 3)

(b) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x|^2$, $h(x) = |x|^3$ എന്നീ ഫംഗ്ഷനുകളിൽ എത്രയെണ്ണം $x = 0$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഡിഫറൻഷ്യബിൾ അല്ലാത്തതാണ് ?

- (i) 0 (ii) 1
 (iii) 2 (iv) 3 (സ്കോർ : 1)

7. ഓരോന്നിനും $\frac{dy}{dx}$ കാണുക.

- (a) $x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4y^3 = 5$ (സ്കോർസ് : 2)
 (b) $x = 2 \cos^3 \theta$, $y = 2 \sin^3 \theta$ (സ്കോർസ് : 2)
 (c) $y = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$; $-1 \leq x \leq 1$ (സ്കോർസ് : 2)

8. (a) തന്നിട്ടുള്ള ഫംഗ്ഷനുകളിൽ എപ്പോഴും ഇൻക്രീസിങ് ആയത് ഏതാണ് ?

- (i) $x + \sin 2x$ (ii) $x - \sin 2x$
 (iii) $2x + \sin 3x$ (iv) $2x - \sin x$ (സ്കോർ : 1)

(b) ഒരു സിലിണ്ടറിന്റെ ആരം 1 cm/s നിരക്കിൽ കൂടുകയും ഉയരം 1 cm/s നിരക്കിൽ കുറയുകയും ചെയ്യുന്നു.

ആരം 5 cm, ഉയരം 15 cm എന്ന സമയത്ത് ഈ സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം മാറുന്നതിന്റെ നിരക്ക് കണക്കാക്കുക. (സ്കോർസ് : 2)

ആരവും ഉയരവും മാറ്റം വരുന്നുണ്ടെങ്കിലും സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം മാറ്റം വരാതിരിക്കാൻ വേണ്ടി അതിന്റെ ആരവും ഉയരവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കാണുക. (സ്കോർ : 1)

(c) $2x^2 + 3y^2 = 5$ എന്ന വക്രത്തിന് (1, 1) എന്ന ബിന്ദുവിലുള്ള തൊടുവര (ടാൻജന്റ്) യുടെ സമവാക്യം എഴുതുക. (സ്കോർസ് : 2)

9. Integrate the following :

(a) $\frac{x-1}{x+1}$ (Score : 1)

(b) $\frac{\sin x}{\sin(x-a)}$ (Scores : 2)

(c) $\frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ (Scores : 3)

10. (a) What is the value of $\int_0^1 x(1-x)^9 dx$?

(i) $\frac{1}{10}$

(ii) $\frac{1}{11}$

(iii) $\frac{1}{90}$

(iv) $\frac{1}{110}$ (Score : 1)

(b) Find $\int_0^1 (2x+3) dx$ as the limit of a sum. (Scores : 3)

11. Consider the functions :

$$f(x) = |x| - 1 \text{ and } g(x) = 1 - |x|$$

(a) Sketch their graphs and shade the closed region between them. (Scores : 2)

(b) Find the area of their shaded region. (Scores : 2)

12. (a) Consider the family of all circles having their centre at the point (1, 2). Write the equation of the family. (Score : 1)

Write the corresponding differential equation. (Score : 1)

(b) Write the integrating factor of the differential equation

$$\cos x \frac{dy}{dx} + y = \sin x ; 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \quad (\text{Scores : 2})$$

9. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവ ഇന്റഗ്രേറ്റ് ചെയ്യുക :

(a) $\frac{x-1}{x+1}$ (സ്കോർ : 1)

(b) $\frac{\sin x}{\sin(x-a)}$ (സ്കോർസ് : 2)

(c) $\frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ (സ്കോർസ് : 3)

10. (a) $\int_0^1 x(1-x)^9 dx$ -ന്റെ വിലയെത്ര ?

(i) $\frac{1}{10}$

(ii) $\frac{1}{11}$

(iii) $\frac{1}{90}$

(iv) $\frac{1}{110}$

(സ്കോർ : 1)

(b) $\int_0^1 (2x+3) dx$ എന്നത് ഒരു തുകയുടെ ലിമിറ്റ് ആയി കണ്ടെത്തുക. (സ്കോർസ് : 3)

11. $f(x) = |x| - 1$, $g(x) = 1 - |x|$ എന്നീ ഫംഗ്ഷനുകൾ പരിഗണിക്കുക.

(a) ഇവയുടെ ഗ്രാഫുകൾ വരച്ച് അവയ്ക്കിടയിലുള്ള ഭാഗം ഷേഡ് ചെയ്യുക. (സ്കോർസ് : 2)

(b) ഷേഡ് ചെയ്ത ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് (area) കാണുക. (സ്കോർസ് : 2)

12. (a) (1, 2) എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി വരുന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ ഫാമിലി പരിഗണിക്കുക.

ഈ ഫാമിലിയുടെ സമവാക്യം എഴുതുക. (സ്കോർ : 1)

ഈ സമവാക്യത്തിനനുയോജ്യമായ ഡിഫറൻഷ്യൽ ഇക്വേഷൻ എഴുതുക.

(സ്കോർ : 1)

(b) $\cos x \frac{dy}{dx} + y = \sin x$; $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ എന്ന ഡിഫറൻഷ്യൽ ഇക്വേഷന്റെ ഇന്റഗ്രേറ്റിങ് ഫാക്ടർ കാണുക. (സ്കോർസ് : 2)

13. (a) If \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} respectively are the position vectors representing the vertices A, B, C, D of a parallelogram, then write \vec{d} in terms of \vec{a} , \vec{b} and \vec{c} . (Score : 1)
- (b) Find the projection vector of $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ along the vector $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$. (Scores : 2)
- Also write \vec{b} as the sum of a vector along \vec{a} and a vector perpendicular to \vec{a} . (Score : 1)
- (c) Find the area of a parallelogram for which the vectors $2\hat{i} + \hat{j}$ and $3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ are adjacent sides. (Scores : 2)

OR

- (a) Write the magnitude of a vector \vec{a} in terms of dot product. (Score : 1)
- (b) If \vec{a} , \vec{b} and $\vec{a} + \vec{b}$ are unit vectors, then prove that the angle between \vec{a} and \vec{b} is $\frac{2\pi}{3}$. (Scores : 2)
- (c) If $2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ and $m\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ are perpendicular to each other, then find m. (Score : 1)
- Also find the area of the rectangle having these two vectors as sides. (Scores : 2)
14. (a) Write the Cartesian equation of the straight line through the point (1, 2, 3) and along the vector $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$. (Score : 1)
- (b) Write a general point on this straight line. (Score : 1)
- (c) Find the point of intersection of this straight line with the plane $2x + 3y - z + 2 = 0$. (Scores : 2)
- (d) Find the distance from (1, 2, 3) to the plane $2x + 3y - z + 2 = 0$. (Score : 1)

15. Consider the linear inequalities

$$2x + 3y \leq 6, 2x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0.$$

- (a) Mark the feasible region. (Scores : 2)
- (b) Maximise the function $z = 4x + 5y$ subject to the given constraints. (Scores : 2)

13. (a) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ എന്നിവ യഥാക്രമം ഒരു സാമാന്തരികം A, B, C, D-യുടെ ശീർഷങ്ങളുടെ പൊസിഷൻ വെക്ടറുകളാണെങ്കിൽ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് \vec{d} എഴുതുക. (സ്കോർ : 1)

(b) $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ എന്ന വെക്ടറിന്റെ ദിശയിൽ $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ എന്ന വെക്ടറിന്റെ പ്രോജക്ഷൻ വെക്ടർ കാണുക. (സ്കോർസ് : 2)

കൂടാതെ \vec{a} യുടെ ദിശയിലുള്ളതും \vec{a} യ്ക്ക് ലംബമായതുമായ രണ്ടു വെക്ടറുകളുടെ തുകയായി \vec{b} എഴുതുക. (സ്കോർ : 1)

(c) $2\hat{i} + \hat{j}, 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ എന്നീ വെക്ടറുകൾ സമീപ വശങ്ങളായി വരുന്ന ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക. (സ്കോർസ് : 2)

അല്ലെങ്കിൽ

(a) \vec{a} എന്ന ഒരു വെക്ടറിന്റെ മാഗ്നിറ്റ്യൂഡ് ഡോട്ട് പ്രൊഡക്റ്റ് ഉപയോഗിച്ച് എഴുതുക. (സ്കോർ : 1)

(b) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}$ എന്നിവ യൂണിറ്റ് വെക്ടറുകളാണെങ്കിൽ \vec{a}, \vec{b} എന്നിവയ്ക്കിടയിലെ കോൺ $\frac{2\pi}{3}$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക. (സ്കോർസ് : 2)

(c) $2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}, m\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ എന്നിവ പരസ്പരം ലംബങ്ങളായാൽ m-ന്റെ വില കാണുക. (സ്കോർ : 1)

ഈ രണ്ടു വെക്ടറുകൾ വശങ്ങളായ ചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക. (സ്കോർസ് : 2)

14. (a) (1, 2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതും $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ എന്ന വെക്ടറിന്റെ ദിശയിലുള്ളതുമായ രേഖയുടെ കാർട്ടേഷ്യൻ ഇക്വേഷൻ എഴുതുക. (സ്കോർ : 1)

(b) ഈ രേഖയിലെ ഒരു പൊതു ബിന്ദു എഴുതുക. (സ്കോർ : 1)

(c) ഈ രേഖ $2x + 3y - z + 2 = 0$ എന്ന തലവുമായി സൗഗമ്യമുള്ള ബിന്ദു കാണുക. (സ്കോർസ് : 2)

(d) (1, 2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $2x + 3y - z + 2 = 0$ എന്ന തലത്തിലേയ്ക്കുള്ള അകലം കാണുക. (സ്കോർ : 1)

15. $2x + 3y \leq 6, 2x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$ എന്നീ ഇനീക്വാലിറ്റികൾ പരിഗണിക്കുക.

(a) ഇവയ്ക്കനുയോജ്യമായ ഫീസിബിൾ റീജിയൻ അടയാളപ്പെടുത്തുക. (സ്കോർസ് : 2)

(b) തന്നിട്ടുള്ള നിബന്ധനകൾക്ക് വിധേയമായി $z = 4x + 5y$ എന്ന ഫംഗ്ഷനെ മാക്സിമൈസ് ചെയ്യുക. (സ്കോർസ് : 2)

16 In a factory, there are two machines A and B producing toys. They respectively produce 60 and 80 units in one hour. A can run a maximum of 10 hours and B a maximum of 7 hours a day. The cost of their running per hour respectively amounts to 2,000 and 2,500 rupees. The total duration of working these machines cannot exceed 12 hours a day. If the total cost cannot exceed ₹ 25,000 per day and the total daily production is at least 800 units, then formulate the problem mathematically. **(Scores : 2)**

17. (a) For two independent events A and B, which of the following pair of events need not be independent ?

(i) A', B'

(ii) A, B'

(iii) A', B

(iv) $A - B, B - A$

(Score : 1)

(b) If $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.7$ and $P(A \cup B) = 0.9$, then find $P\left(\frac{A}{B}\right)$ and $P\left(\frac{B}{A}\right)$. **(Scores : 3)**

18.

X =	1	2	3	4	5
P(X =)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	p

The probability distribution of a random variable X taking values 1, 2, 3, 4, 5 is given

(a) Find the value of P

(Score : 1)

(b) Find the mean of X

(Score : 1)

(c) Find the variance of X

(Scores : 2)

16. കളിപ്പാട്ടങ്ങളുണ്ടാക്കുന്ന ഒരു ഫാക്ടറിയിൽ മണിക്കൂറിൽ യഥാക്രമം 60-ഉം 80-ഉം യൂണിറ്റുകളുണ്ടാക്കാവുന്ന രണ്ടു മെഷീനുകൾ A-യും B-യും ഉണ്ട്. ഇവയോരോന്നും ഒരു ദിവസം യഥാക്രമം 10-ഉം 7-ഉം മണിക്കൂർവരെ പ്രവർത്തിപ്പിക്കാം. ഇവയുടെ പ്രവർത്തനച്ചെലവ് മണിക്കൂറിൽ യഥാക്രമം 2,000 രൂപയും 2,500 രൂപയുമാണ്. ഒരു ദിവസം ഇവയുടെ മൊത്തം പ്രവൃത്തി സമയം 12 മണിക്കൂറിൽ കവിയരുത്. ആകെ പ്രവർത്തനച്ചെലവ് പ്രതിദിനം 25,000 രൂപയിൽ കവിയാതെയും ദിനംപ്രതിയുള്ള ഉൽപ്പാദനം 800 യൂണിറ്റുകളെങ്കിലും ആകുംവിധവും ഈ പ്രശ്നത്തെ ഗണിതപരമായി ഫോർമുലേറ്റ് ചെയ്യുക. (സ്കോർസ് : 2)

17. (a) A, B എന്നിവ ഇൻഡിപ്പൻഡന്റ് ഇവന്റുകളാണെങ്കിൽ താഴെ കൊടുത്ത ജോഡികളിൽ ഇൻഡിപ്പൻഡന്റ് ഇവന്റുകളാവാൻ സാധ്യതയില്ലാത്തതേത്?
 (i) A', B' (ii) A, B'
 (iii) A', B (iv) $A - B, B - A$ (സ്കോർ : 1)

(b) $P(A) = 0.6, P(B) = 0.7, P(A \cup B) = 0.9$ എന്നിങ്ങനെയായാൽ $P(A/B), P(B/A)$ എന്നിവ കാണുക. (സ്കോർസ് : 3)

18

X =	1	2	3	4	5
P(X =)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	p

1, 2, 3, 4, 5 എന്നീ വിലകളെടുക്കുന്ന റാൻഡം വേരിയബിൾ X-ന്റെ പ്രോബബിലിറ്റി ഡിസ്ട്രിബ്യൂഷൻ പട്ടികയിൽ തന്നിട്ടുണ്ട്.

- (a) P-യുടെ വില കാണുക. (സ്കോർ : 1)
- (b) X-ന്റെ മീൻ കാണുക. (സ്കോർ : 1)
- (c) X-ന്റെ വേരിയൻസ് കാണുക. (സ്കോർസ് : 2)